Vzorové riešenia 2. série TMS

Úloha č. 1: ***Stolný tenis***

Loptička a raketa stoja spolu 11 eur. Raketa je o 10 eur drahšia ako loptička. Koľko eur stojí loptička?

Riešenie:

Loptičku si označíme “L“ a raketu “R“
Zo zadania si vyjadríme informácie, ktoré poznáme a to:
$L+R=11$ (1. rovnica)
$L+10=R$ (2. rovnica)
Na základe týchto informácií, si dokážeme vytvoriť rovnicu, vďaka ktorej si dokážeme cenu loptičky dopočítať. Prepíšeme si 1. rovnicu, no “R“ nachádzajúce sa v nej nahradíme 2. rovnicou
Vznikne nám rovnica:

$$L+(L+10)=11$$
$$L+L+10=11$$
$$2L+10=11/-10$$
$$2L=1/:2$$
$$L=0{,}5$$

Cena loptičky je teda 0,5 Eur.

Úloha č. 2: ***Tehla***

Tehla váži kilo a pol tehly, koľko váži tehla?

Riešenie:

Tehlu si nahradíme písmenkom “T“.
Teraz si podľa zadania napíšeme rovnicu :
T (tehla) = (váži) 1(kilo) + (a) 0,5T (pol tehly)
$T=1+0{,}5T$
Následne si túto rovnicu dopočítame :

$$T=1+0{,}5T \quad /\cdot 2$$
$$2T=2+T \qquad /-T$$
$$1T=2$$

Tehla teda váži 2 kg.

Úloha č. 3: ***Lekná***

Na jazere je lekno ktoré sa každým dňom zdvojnásobí. Celé jazero zarastie za 30 dní. Za koľko dní zarastú jazero 2 lekná?

Riešenie:

Zo zadania vieme že sa lekno každým dňom zdvojnásobí. Preto si vieme zapísať rozrastanie jedného lekna :

	1. deň	2. deň	3. deň	4. deň	5. deň	6. deň	7. deň...
1 lekno	1	2	4	8	16	32	64

Rovnako si vieme zapísať aj rozrastanie 2 lekien :

	1. deň	2. deň	3. deň	4. deň	5. deň	6. deň	7. deň...
2 lekná	2	4	8	16	32	64	128

Následne si tieto 2 tabuľky vieme zapísať pod seba :

	1. deň	2. deň	3. deň	4. deň	5. deň	6. deň	7. deň...
1 lekno	1	2	4	8	16	32	64
2 lekná	2	4	8	16	32	64	128

Môžeme si všimnúť, že v každom stĺpci je v riadku "2 lekná" dvojnásobok čísla v riadku "1 lekno". Teda vieme, že na 30 deň v riadku "2 lekná" bude rovnaké číslo ako v riadku "1 lekno" na 31. deň.

Z toho vyplýva, že sa zarastenie jazera pri možnosti 2 lekien, skráti o 1 deň, pretože na **29. deň** 2 lekná zarastú to isté, čo 1 lekno na 30. deň, čiže jedno jazero.

Úloha č. 4: ***Vedrá***

Máš iba 2 nádoby o objeme 5 a 3 litre, ktoré nemajú mierku ale majú presne 3 a 5 litrov. Zapíš postup prelievania vody aby ti v 5 litrovej nádobe zostali presne 4 litre . Vody máš neobmedzené množstvo a nádoby môžeš vylievať.

Riešenie:

Táto úloha má 2 riešenia

Riešenie prvé : Naberieme vodu do 5 litrového vedra a prelejeme 3 litre do 3-litrového. Vylejeme 3-litrové a nalejeme do neho 2 litre, ktoré nám zostali v 5-litrovom. Znovu naplníme 5-litrové a doplníme do 3-litrového chýbajúci liter. V 5-litrovom nám zostanú 4 litre, ktoré sme potrebovali.

Riešenie druhé : Naplníme 3-litrové a prelejeme 3 litre do 5-litrového. Znovu naplníme 3- litrové a dolejeme do 5-litrového. V 3-litrovom nám zostane 1 liter. 5-litrové vylejeme a nalejeme do neho 1 liter, ktorý nám zostal v 3-litrovom. Znovu naplníme 3-litrové a prelejeme do 5-litrového v ktorom máme 1 liter. V 5 litrovom budeme mať 4 litre.

Úloha č. 5: ***Farma***

Minulý rok sa Šimonovi podarilo dobre investovať do kryptomien, a tak sa rozhodol, že si kúpi farmu. Vie, že na farme je 28 zvierat, buď sliepok alebo koňomrožov (ten má 4 nohy). Dokopy majú zvieratá 90 nôh. Koľko je koňomrožov a koľko sliepok?

Riešenie:

Keďže dokopy je 28 zvierat je x koňomrožov a 28 - x sliepok, čiže koňomrože majú 4x nôh a sliepky (28 - x) nôh, teda: 4x + 2(28 - x) = 90, to nám dá po vypočítaní x = 17. Teda, máme 17 koňomrožov a 11 sliepok.

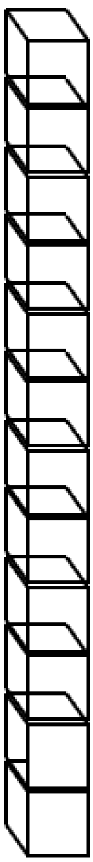
Môžeme spraviť aj skúšku: 17 . 4 (celkový počet nôh koňomrožov) + 11 . 2 (celkový počet nôh sliepok) = 90. Skúška nám vyšla.

Úloha č. 6: ***Krádež***

Šimon sa raz ráno zobudil a zistil, že mu chýba niekoľko koňomrožov. Ukradol mu ich zlý návrhár Martin, ktorý z nich chcel vytvoriť nový módny kúsok. Všimol si Martina v helikoptére nad ním. Svojim bystrým rozmýšľaním Šimon usúdil, že keby teraz postavil vežu z kociek so stranami 1 mm tak, aby sa dostal až k helikoptére, veža by mala objem 1 km^3. Ako vysoko letí Martin?

Riešenie:

Naša veža by vyzerala nejak takto (kociek bude ale omnoho viac):



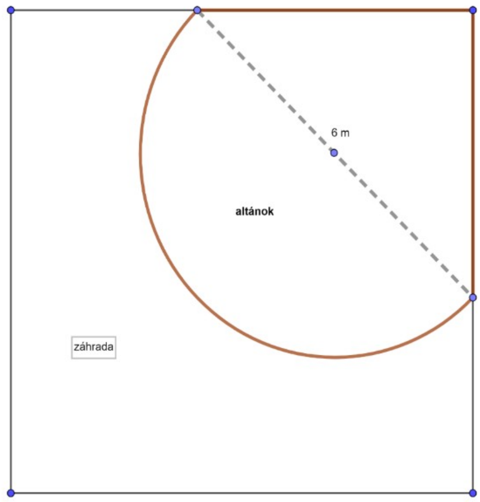
Keďže kocky sú poskladané na seba, a objem kvádra sa rovná obsahu podstavy krát výške ($V = S \cdot v$), je jasné, že objem našej veže bude rovný $V = (a \cdot a) \cdot v$, kde **a** je strana štvorca, čiže $a \cdot a$ je obsah podstavy, **v** je výška veže

Keďže a = 1mm, V = 1 km^3 = 1 000 000 000 000 000 000 mm^3, tak V=(a.a).v vieme upraviť na: 1 000 000 000 000 000 000 = 1. v, čiže v = 1 000 000 000 000 000 000 mm = 1 000 000 000 000 000 m = 1 000 000 000 000 km . Teda, Martin letí až 1 trilión mm vysoko, čo je 1 biliarda metrov alebo 1 bilión kilometrov vysoko a tak ďalej.

Úloha č. 7: ***Altánok***

Zadanie:

Pani Oddýchnutá miluje kruhové altánky. Dlho sníva o vlastnom , avšak oplotený pozemok za jej domom je v tvare štvorca . Ona nechce búrať svoj plot a nechce ani aby mala miesto za altánkom kde sa nedostane. Preto ju napadlo že by jej altánok mohol ísť do rohu jej záhrady takže altánok by sa skladal z polkruhu a trojuholníka. V tom ju však zarazilo že príde o priestor v altánku. Pomôž jej vypočítať o koľko miesta v altánku príde ak altánok má priemer 6m .



Nápad

Uvedomíme si že od pôvodnej polky altánku sme odstránili dva kruhové výseky.

Riešenie:

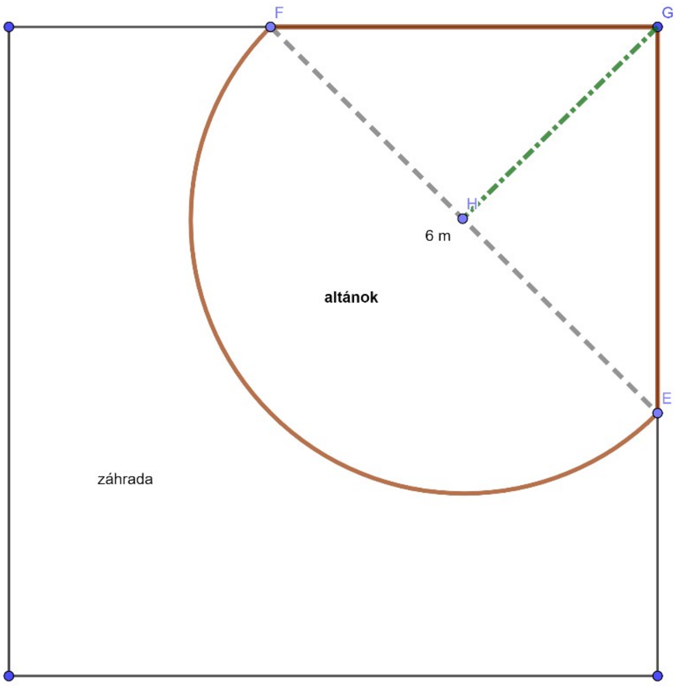
Na to aby sme vypočítali obsah týchto výsekov nám stačí odčítať obsah rovnoramenného pravouhlého trojuholník GFE od obsahu polky altánku.

d = 6m r = 3m

$S_1 = \frac{(\pi \cdot r^2)}{2}$ - plocha polovice altánku keby ho neupravujeme

$S_2 = 2 \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) = r^2$ - plocha trojuholníka GFE ktorý tvoria polku altánku (plocha dvoch menších trojuholníkov)

$S_1 - S_2 = S_3$ S3 - plocha, o ktorú prídeme úpravou altánku



$$S_3 = \left(\frac{(\pi \cdot r^2)}{2}\right) - r^2$$

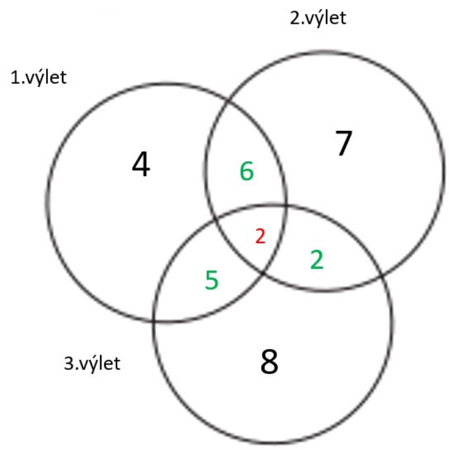
$$S_3 = r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$S_3 = 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3{,}14}{2} - 1\right)$$

$$S_3 = 5{,}13\, m^2$$

Pani Oddýchnutá príde o 5,13 m^2

Úloha č. 8: ***Výlety***

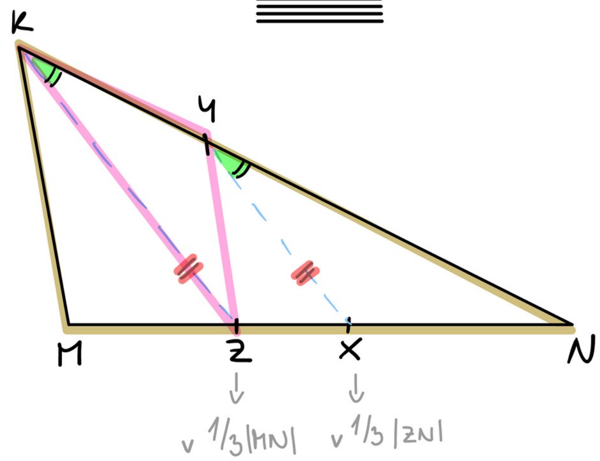


Najprv som si nakreslila takzvaný Vennov diagram (to sú tie 3 kruhy:D) a začala zapisovať čísla zo zadania. Červeným číslom sú zapísaní žiaci, ktorí išli na všetky výlety, zelenými číslami sú zapísaní tí, ktorí išli na 2 rôzne výlety a čiernou sú už iba dopočítaní žiaci do skupiny. !Častá chyba!
V zadaní bolo napísané: 8 študentov z prvého výletu sa zúčastnilo aj druhého. V tomto prípade bolo potrebné od 8 odpočítať 2 žiakov, ktorí sú už zapísaní tou červenou. Nakoniec už bolo treba len spočítať všetky čísla.

Úloha č. 9: ***Trojuholník***

V trojuholníku MNK leží v tretine úsečky MN bod Z (je bližšie k bodu M), bod X je v tretine úsečky ZN (bližšie bodu Z) a bod Y leží na úsečke NK tak, že uhly XYN a ZKN sú zhodné. Určte pomer obsahov trojuholníkov MNK a ZYK.

$\boxed{9 : 2}$



Body K, Y, N ležia na jednej priamke a uhly ZKN a XYN sú zhodné. Priamky ZK a XY sú rovnobežné, trojuholníky ZKY a ZKX majú rovnakú výšku na stranu ZK a teda aj rovnaký obsah. Pomer trojuholníkov MNK a ZYK je preto rovnaký ako pomer obsahov trojuholníkov MNK a ZKX.

1. možné riešenie

Trojuholníky MNK a ZYK majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu K, teda pomer ich obsahov je rovnaký ako pomer dĺžok strán MN a ZX. Pomer dĺžok úsečiek MN a ZN je 3:2, pomer dĺžok úsečiek ZN a ZX je 3:1, teda pomer dĺžok úsečiek MN a ZX je $(3:1)\cdot(3:2) = 9:2$

2. možné riešenie

Bod Y na úsečke KN je v rovnakom pomere ako bod Z na úsečke MN. Teda trojuholníky ZYN a MKN sú podobné a koeficient podobnosti je 2:3. A teda obsahy týchto trojuholníkov sú v pomere 4:9.

Pomer obsahov trojuholníkov MNK a ZYN je dohromady 9:4, pomer obsahov trojuholníkov ZYN a ZYK je 2:1 a teda pomer obsahov trojuholníkov MNK a ZYK je $(9:4)\cdot(2:1) = 18:4$ čo po upravení na základný tvar je 9:2

Úloha č. 10: ***Kosodĺžniky***

Začnime od toho, čo vieme. Ak má štvorec obsah rovný $4\,cm^2$, a vzorec na výpočet obsahu štvorca je $S = a^2$, dostávame rovnicu $a^2 = 4\,cm^2$, z čoho po odmocnení dostávame $a = 2\,cm$. Zo zadania je jasné, že dĺžka strany štvorca je výška v pôvodnom kosodĺžniku. Pomocou toho vieme nasledovný vzorcom vypočítať dĺžku AB:

$|AB| \cdot |BH| = S_{ABCD}$

$|AB| \cdot 2\,cm = 6\,cm^2$

$|AB| = 3\,cm$

Ďalej keď poznáme dĺžky AB a FB, vieme ich odpočítaním vypočítať aj $|AF| = 1\,cm$, a vďaka symetrickosti talizmanu budú mať aj úsečky CH, DE a BG rovnakú dĺžku.

S týmto potrebujeme už len dopočítať obsah zvyšných kosodĺžnikov $AFGK, BCJG, CHEI, DALE$.

Ako si môžeme všimnúť, vďaka symetrii príkladu majú všetky rovnaký obsah, a to:

$S_{AFGK} = |AF| \cdot v = |AF| \cdot |BG| = 1\,cm \cdot 1\,cm = 1\,cm^2$.

(Výšku v môžeme nahradiť $|BG|$, lebo ak predĺžime AF, dostaneme úsečku AB, a jasne vidíme, že vzdialenosť AB a KG je $|BG|$)

Teraz už jednoducho zistíme obsah celého talizmanu.

$S_{talizman} = S_{ABCD} + S_{EFGH} - S_{BFDH} + (4 \cdot S_{AFGK}) = 6\,cm^2 + 6\,cm^2 - 4\,cm^2 + (4 \cdot 1\,cm^2)$

$S_{talizman} = 12\,cm^2$

Úloha sa nás však pýta na cenu výroby talizmanu. Ak $1\,m^2$stojí 1 euro, aby sme vedeli určiť cenu, musíme premeniť jednotky, a vyjde nám $S_{talizman} = 0{,}0012\,m^2$. Teraz už je ľahké určiť cenu-tá bude 0,0012 eura, teda okolo 0,12 centov, ani jeden cent. Celkom lacné, nemyslíte si?