Úloha č. 1: ***Uhádni môj vek***

Môžeme začať zápisom:

	dedko	vnuk
ich vek teraz		
ich vek pred 2 rokmi		

Vnuka označíme písmenom ***x*** a keďže dedko je dnes štyrikrát starší, tak ho označíme ***4x***.

Bude nás zaujímať aj to, akí starí boli pred 2 rokmi, takže odpočítame z premenných 2. Zapíšeme si všetky údaje do tabuľky.

	dedko	vnuk
ich vek teraz	4x	x
ich vek pred 2 rokmi	4x-2	x-2

Ich vek pred 2 rokmi zapíšeme ako rovnicu:

$$4x-2=x-2$$

My však vieme, že pred 2 rokmi bol dedko o 6 rokov mladší ako päťnásobok vnukovho veku pred 2 rokmi.
To znamená, že vnukov vek pred 2 rokmi musíme vynásobiť 5, pretože dedko bol o 6 rokov mladší ako päťnásobok vnukovho veku. A keďže chceme, aby sa nám rovnica rovnala, musíme dedkovi k veku pred 2 rokmi pridať 6 rokov, lebo mal o 6 rokov menej ako päťnásobok vnukovho veku (a aby jeho vek bol rovnaký s päťnásobkom veku vnuka, musíme k nemu pripočítať číslo 6).

Vznikla nám teda rovnica, ktorá nám konečne platí:

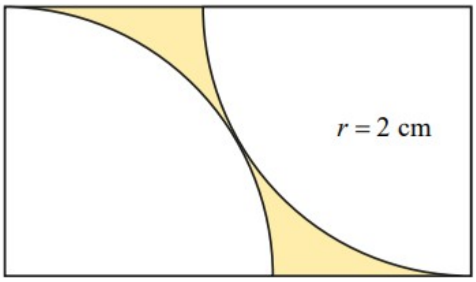
$$4x-2+6=5\cdot(x-2)$$
$$4x+4=5x-10$$
$$x=14$$

Dedko $=4x$
Dedko $=4\cdot 14=56$

Dedko má dnes 56 rokov a vnuk má dnes 14 rokov.

Úloha č. 2: ***Polkruhy***

Vypočítaj obsah žlto zvýraznenej časti, ktorá sa nachádza medzi štvrťkruhmi umiestnenými v obdĺžniku



$c = 2r$
$b = r$
$a = ?$

$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = (2r)^2 - r^2$
$a^2 = 4^2 - 2^2$
$a^2 = 16 - 4$
$a = \sqrt{(12)}$

$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$
$S_1 = \frac{\pi \cdot 4}{4}$
$S_1 = \pi$
$S_2 = a \cdot b$
$S_2 = 2\sqrt{(12)}$

$S_ž = S_2 - 2S_1$
$S_ž = 2\sqrt{(12)} - 2\pi$
$S_ž \doteq 0{,}65$

Úloha č. 3: ***Juraj a Fero***

Juraj žije v byte s rodičmi a o presne 2 roky mladším bratom Ferom. Keď som sa Juraja opýtal: „Koľko máš rokov?“, odpovedal mi:
„Môj vek je číslo, ku ktorému keď pripočítaš 3, výsledok vydelíš najmenším prvočíslom, potom odčítaš druhú odmocninu z 25 a pripočítaš najmenší spoločný násobok čísel 3 a 4, dostaneš pôvodné číslo.“
Koľko rokov má Fero?
Z informácií, ktoré nám poskytol Juraj, vieme vypočítať jeho vek. Najmenšie prvočíslo je 2, druhá odmocnina z 25 je 5 a najmenší spoločný násobok 3 a 4 je 12. Jurajov vek si označíme ako x:

K Jurajovmu veku pripočítame 3:
$x+3$
výsledok vydelíme najmenším prvočíslom:
$(x+3) \div 2$
odpočítame druhú odmocninu z 25:
$(x+3) \div 2 - 5$
a nakoniec pripočítame najmenší spoločný násobok čísel 3 a 4:
$(x+3) \div 2 - 5 + 12$
a to sa rovná Jurajovmu veku, teda x.

Dostali sme rovnicu:

$$(x+3)\div 2-5+12 = x \qquad / \cdot 2$$
$$x+3-10+24 = 2x \qquad / -x$$
$$3-10+24 = x$$
$$17 = x$$

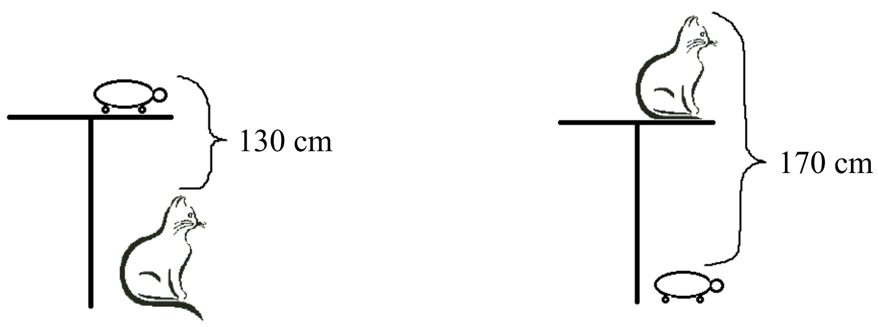
Juraj má 17 rokov a Fero je presne o 2 roky mladší, má teda 15 rokov.

Všetky odpovede na túto otázku boli správne. Len tak ďalej a píšte postupy, aby sme Vám nemuseli zbytočne strhávať body :) .

Lipchan

Úloha č. 4: ***Výška stola***

K dispozícii máme 2 obrázky. Na základe týchto 2 obrázkov zisti, koľko meria stôl.



Z obrázkov vyplýva, že máme 3 neznáme a to:
mačka … m
korytnačka … k
stôl … s

Obrázky si zapíšeme ako 2 rozdielne rovnice.
Rovnicu 1 (obr.1) si zapíšeme ako: $s+m-k = 170$
Rovnicu 2 (obr.2) si zapíšeme ako: $s+k-m = 130$
Následne si tieto 2 rovnice upravíme do tvaru, ktorý nám vyhovuje:

Rovnica 1:

$$s+m-k = 170$$
$$m-k = 170-s$$

Rovnica 2:

$$s+k-m = 130$$
$$k-m = 130-s \qquad / \cdot(-1)$$
$$-k+m = -130+s$$
$$m-k = s-130$$

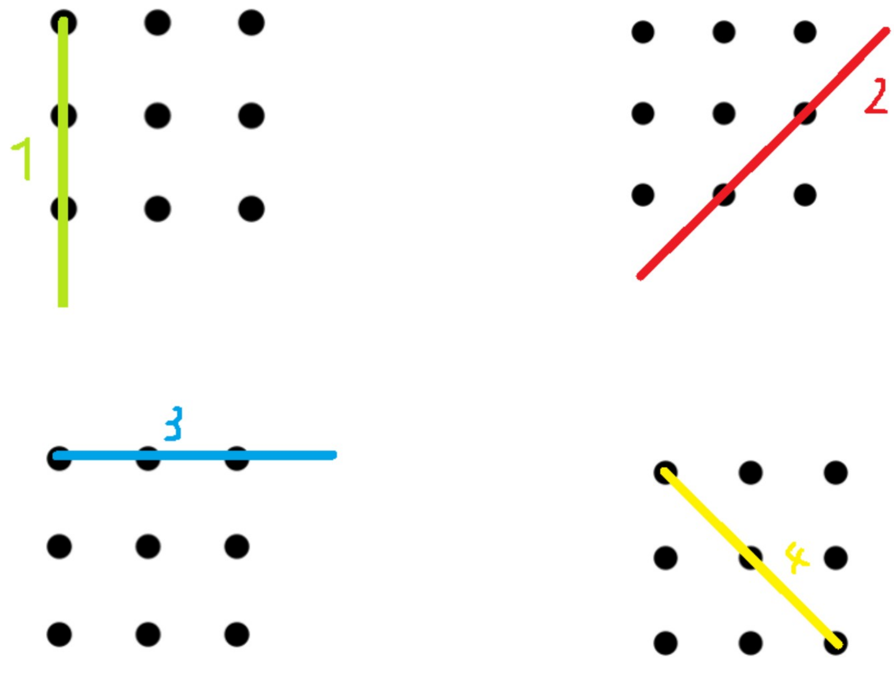
V oboch rovniciach sa ľavé strany zhodujú, a preto vieme povedať, že pokiaľ sa „$m-k = 170-s$“ a „$m-k = s-130$“ tak platí, že „$s-130 = 170-s$“ . Následne si túto novú rovnicu upravíme:

$$
\begin{aligned}
s-130 &= 170-s\\
2s-130 &= 170\\
2s &= 170+130\\
2s &= 300\\
s &= 150
\end{aligned}
$$

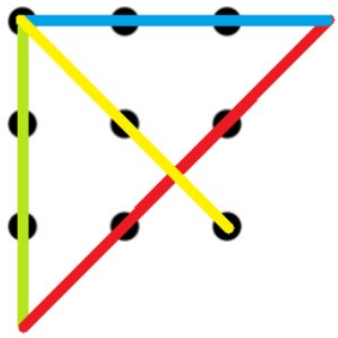
Vypočítaním „s“ sme zistili, že stôl meria 150 cm a tým sme sa dostali k odpovedi na našu otázku.

Úloha č. 5: ***Spájanie bodov***
Spoj všetkých 9 bodov lomenou čiarou zloženou zo 4 úsečiek, bez toho, aby si zdvihol pero z papiera.

Myšlienkou úlohy bolo rozmýšľať “mimo boxu“ (outside the box). Pokiaľ by niekto uvažoval nad úlohou tak, že tých 9 bodov je akoby uzavretých v boxe a nemôže ísť mimo neho, úloha by nemala riešenie.
Pri rozmýšľaní mimo boxu bola však táto úloha ľahko splniteľná, napríklad spôsobom:



Výsledné doplnenie všetkých čiar do jedného obrázku by teda vyzeralo takto:



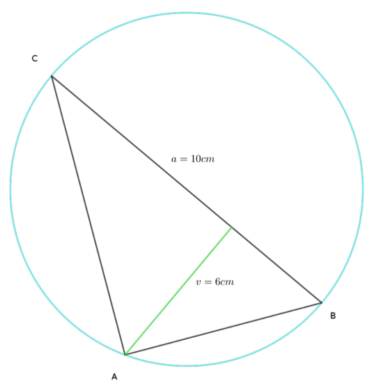
Úloha č. 6: ***Deliteľnosť***

Namiesto X doplňte do čísla 483X2 takú číslicu, aby číslo bolo deliteľné 4 a zároveň aj 9.

Aby číslo bolo deliteľné číslom 9, jeho ciferný súčet musí byť deliteľný číslom 9.
Ciferný súčet nášho čísla je 4 + 8 + 3 + 2 = 17. Najbližšie násobky čísla 9 sú 18, 27... ak by sme chceli aby ciferný súčet nášho čísla bol 27 museli by sme jeho ciferný súčet zväčšiť o 10, keďže však máme miesto len pre jednu cifru môžeme ciferný súčet zväčšiť najviac o 9. Ciferný súčet musí teda byť 18, čo znamená, že x = 1.
Teraz nám už len stačí overiť, či je toto číslo deliteľné 4. Posledné dvojčíslie je 12, čo znamená, že toto číslo je deliteľné 4.

Úloha č. 7: ***Trojuholník***

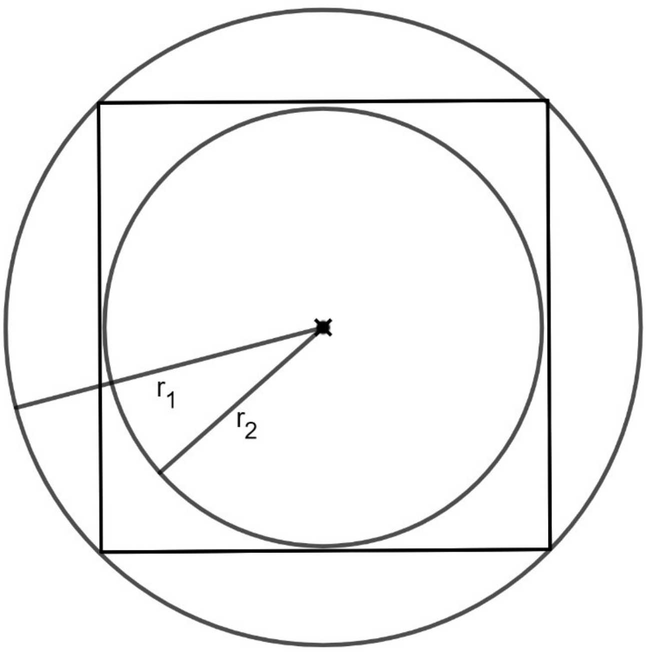
Pravouhlý trojuholník ABC má preponu dlhú 10cm a výšku na preponu dĺžky 6cm. Existuje tento trojuholník? Prečo áno alebo prečo nie?



Keďže trojuholník ABC je pravouhlý, tak kružnica jemu opísaná je Tálesova, teda všetky jeho vrcholy ležia na obvode kružnice a prepona je priemer danej kružnice. To znamená, že najdlhšia možná dĺžka výšky na preponu je polomer kružnice, takže 5 cm.

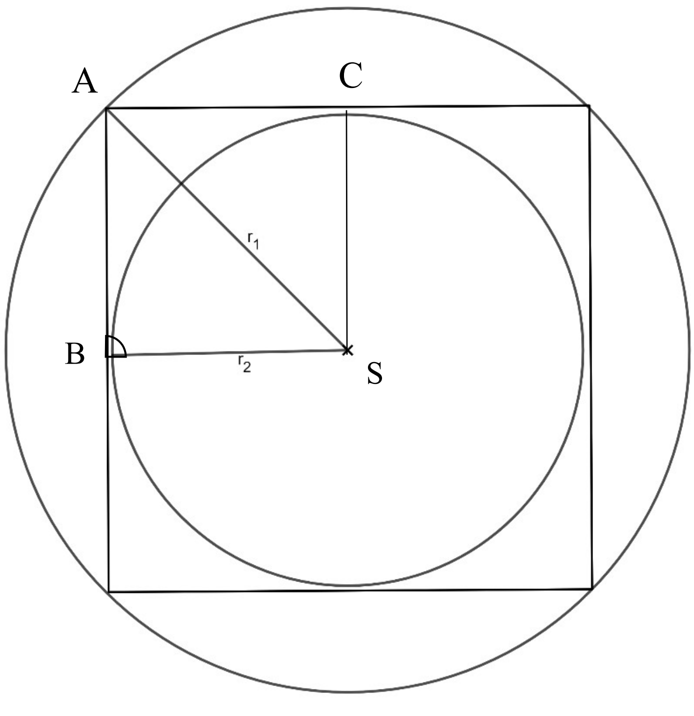
Úloha č. 8: ***Záhon***

Martin si chce v záhrade postaviť záhon. Keďže nie je len vášnivý záhradník ale aj matematik, vymyslel si dopredu, ako si chce svoje krásne tulipány zasadiť. Plánuje postaviť záhon z dvoch kruhov s rovnakým stredom tak, aby z tulipánov mohol vysadiť štvorec opísaný menšiemu kruhu a vpísaný väčšiemu kruhu (viď obrázok). Polomer vonkajšieho kruhu je $r_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ metra . Aký je polomer vnútorného kruhu?



Pomenujme si jeden vrchol štvorca A, stred kružníc S a dotykový bod menšej kružnice so štvorcom B tak ako je na obrázku.

Zo symetrie štvorca vyplýva, že r_2 je polovica strany štvorca, teda $|AB| = r_2$ pretože bod B je v strede strany štvorca. Uhol $\sphericalangle SAB$ je jasne pravý, pretože priamka AB je dotyčnicou na menšiu kružnicu v bode B.



Preto musí platiť v trojuholníku SAB Pytagorova veta:

$$r_2^2+r_2^2=r_1^2$$

Rovnicu si upravíme:

$$2r_2^2=r_1^2$$

$$r_2^2=\frac{r_1^2}{2}$$

$$r_2=\sqrt{\frac{r_1^2}{2}}$$

Po dosadení:

$$r_2=\sqrt{\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{18}{16}}{2}}=\sqrt{\frac{18}{32}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

K výsledku sa vieme dopracovať aj jednoduchšie a rýchlejšie. Vieme, že uhlopriečka v štvorci má dĺžku $a\sqrt{2}$ (vyplýva to z Pytagorovej vety). Keď si zoberieme štvorec $ASCB$, SA teda r_1 je jeho uhlopriečka a AB teda r_2 je jeho strana.

Preto platí:

$$r_1=r_2\sqrt{2} \qquad\qquad r_2=\frac{r_1}{\sqrt{2}}$$

Po dosadení:

$$r_2=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

Práce s odmocninami sa netreba báť. Rovnako netreba hneď chytať do ruky kalkulačku a počítať hodnotu odmocniny. Váš výsledok tým zaokrúhľujete a stáva sa tak nepresným. Ako ste v tejto úlohe sami mohli vidieť, keď sa prepracujete až k samotnému výsledku, odmocnina tam ani nemusí byť. Častokrát sa stáva, že v kombinácii s inými číslami sa z odmocniny stáva pekné číslo. V našom prípade to bol výraz $\sqrt{\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}{2}}$ ktorý na prvý pohľad vôbec nevyzerá na to, že by sa rovnal $\frac{3}{4}$.

Aj takéto veci sa môžete naučiť v našej matematickej triede.

Hazli

Úloha č. 9: ***Včela***

Matej denne dochádza do Banskej Bystrice. Väčšinou chodí vlakom zo Zvolena, ale minule sa mu stalo, že ho vo vlaku uštipla včela. Možno si myslíte, že je to celkom nepravdepodobné a Matej si to myslí tiež. Preto by od vás chcel, aby ste mu pomohli.

Medzi Zvolenom a Banskou Bystricou jazdí 14 vlakových súprav a z toho v štyroch sa nachádza včela. Pravdepodobnosť, že Mateja vo vlaku so včelou táto včela uštipne je 0,8. Vypočítajte pravdepodobnosť, že Mateja v náhodnom vlaku uštipne včela.

Keby sa včela nachádzala v každom vlaku, tak by bola pravdepodobnosť uštipnutia 0,8. Keďže je včela len v 4 vlakoch zo 14, pravdepodobnosť, že Matej nastúpi do vlaku so včelou je $\frac{4}{14}$.

Preto bude pravdepodobnosť uštipnutia $0{,}8\cdot\frac{4}{14}=\frac{8}{35}\doteq 0{,}2286=22{,}86\,\%$

Na toto sme prišli len „sedliackym rozumom“. V matematike však existujú aj vzorce na pravdepodobnosť.

Pravdepodobnosť udalosti A je definovaná ako podiel počtu priaznivých možností (že udalosť A nastane) a počtu všetkých možnosti:

$$P_A=\frac{|A|}{\text{všetky možnosti}}$$

kde $|A|$ znamená počet možností udalosti A

A vieme si odvodiť aj vzorce na pravdepodobnosť prieniku, resp. zjednotenia udalostí, s ktorými vieme dokázať, že máme správny výsledok. :)

Nielen kapitola pravdepodobnosť, ale aj iné zaujímavé témy sa preberajú na hodinách matematiky v našich matematických triedach. Dozviete sa nielen aké veci platia, ale aj prečo tieto veci platia. V obyčajnej triede na gymnáziu by ste takúto možnosť nemali. Rozvíja to nielen matematické, ale hlavne logické myslenie.

Hazli

Úloha č. 10: ***Hodiny***

Keď Oliver vstal o 6:00 ráno, všimol si, že na ručičkových hodinkách zvierajú minútová a hodinová ručička uhol 180°. Aký čas bude ukazovať na digitálnych hodinách, keď bude najbližšie uhol medzi ručičkami znovu 180°?

Najprv zistíme, o koľko stupňov sa zmení uhol medzi ručičkami za jednu minútu.

Minútová ručička sa pohne o 1/60 hodiny, za hodinu prejde celé hodiny, teda 360°/60=**6°.**

Hodinová ručička sa pohne o 1/60 hodiny, za hodinu prejde 1/12 kruhu, teda (360°/12)/60=**0,5°.**

Ako sa minútová ručička, bude približovať k hodinovej, každú minútu sa zmenší uhol medzi nimi o 6°. Zároveň ale hodinová ručička bude utekať pred minútovou, a to rýchlosťou 0,5° za minútu. Z toho dostávame, že každú minútu sa zmení uhol medzi ručičkami o 6°-0,5°=**5,5°.**

Chceme, aby nový uhol bol stále 180°. Z toho vyplýva, že zmena uhla musí byť násobkom 360°, aby sa nezmenil. Najmenší násobok je 360°, teda toto bude prvý krát, čo nastane znovu situácia z úlohy. Teraz si už musíme zostaviť rovnicu.

$$5{,}5\,°\cdot m = 360\,°$$

$$(\mathit{zmena\ za\ minútu} \times \mathit{počet\ minút}\ = \mathit{celková\ zmena})$$

$$m = \frac{360\,°}{5{,}5\,°}$$

Toto už len zadáme do kalkulačky a dostaneme *m=65,45*. Teda od 6:00 prebehne 65 minút aj niečo navyše. Otázka sa ale pýta na čas na digitálnych hodinách, čo znamená, že nám na sekundách nezáleží, a že zaokrúhlime dole. Stane sa to teda o 65 minút, čo je čas **7:05**, a to je výsledok tejto úlohy.